Преобразования Фурье и интегральные преобразования с ядрами Фурье

Интеграл Фурье как предельный случай ряда Фурье

Пусть $f(x)$ - функция, заданная для всех действительных x и кусочно-гладкая на каждом конечном интервале $[-l, l]$. Тогда на каждом таком отрезке $f(x)$ может быть разложена в ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l}),$$

причем

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(u)\cos\frac{\pi n u}{l}\,du, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(u)\sin\frac{\pi n u}{l}\,du, \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Таким образом,

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(u)\,du + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(u)\cos\frac{\pi n}{l}(u - x)\,du.$$

Пусть существует интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx.$$

Тогда имеет место формула (*интегральная формула Фурье*):

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} d\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \omega(u-x)\, du = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \omega(u-x)\, du$$

а интеграл

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} d\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \omega(u - x)\, du,$$

называют *интегралом Фурье*.

Приведем соображения, поясняющие идею получения этой формулы. Из (1.2), при $l \to \infty$ (x - фиксировано) получаем:

$$f(x) = \lim_{l\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(u) \cos \frac{\pi n}{l}(u - x)\, du.$$

Попытаемся установить, во что перейдет в пределе сумма справа. С этой целью обозначим:

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l}, \omega_2 = \frac{2\pi}{l}, \ldots, \omega_n = \frac{n\pi}{l}, \ldots,$$

$$\Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi}{l}.$$

Тогда интересующая нас сумма будет иметь вид

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\omega_n\int\limits_{-l}^{l} f(u)\cos\omega_n(u-x)\,du,$$

напоминающий интегральную сумму для функции переменного ω

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\omega(u-x)\,du,$$

составленную для промежутка $[0,\infty]$, что и позволяет ожидать выполнения интегральной формулы Фурье.

Преобразование Фурье

Исходя из интегральной формулы Фурье

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \omega (u - x)\, du,$$

и, учитывая, что для нечетной функции $f(u) \sin \omega(u - x)$

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin \omega (u - x)\, du,$$

можно получить, складывая первую из этих формул со второй, умноженной на i, что

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\omega(u-x)} du.$$

Данная формула называется *интегральной формулой Фурье в комплексной форме.*

Если обозначить

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega u} du,$$

то получаем, что

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega.$$

Эти формулы образуют пару *взаимных преобразований Фурье*, причем функцию $F(\omega)$ называют *преобразованием Фурье* функции $f(x)$. Формула (1.3) называется формулой обращения Фурье.

Формула

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega u} du,$$

может рассматриваться как интегральное уравнение первого рода относительно функции $f(u)$. Формула обращения дает решение этого интегрального уравнения.

Из интегральной формулы Фурье можно получить так называемые *синус-* и *косинус- преобразования Фурье.*

Например, считая $f(u)$ нечетной на $(-\infty, \infty)$, получаем пару взаимных синус-преобразований Фурье:

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty f(u) \sin \omega u \, du,$$

и

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty F_s(\omega) \sin \omega x \, d\omega.$$

Интегральные преобразования с ядрами Фурье

Обсудим вопрос наличия формул обращения для интегральных преобразований, аналогичных полученным выше для преобразования Фурье. Рассмотрим полупрямую $(0,\infty)$ и введем

Определение 4. Интегральным преобразованием на полупрямой будем называть интеграл вида

$$I_f(\alpha) = \int\limits_0^\infty K(x,\alpha) f(x)\, dx, \qquad (1.4)$$

где $f(x) \in \Im$, $\Im$ - некоторый функциональный класс, а $K(x,\alpha)$ - известная функция, которая называется ядром интегрального преобразования.

Примеры интегральных преобразований:

- При $K(x,\alpha) = x^{\alpha-1}$, $I_f(\alpha)$ - преобразование Меллина.
- При $K(x,\alpha) = e^{-\alpha x}$, $I_f(\alpha)$ - преобразование Лапласа.
- При $K(x,\alpha) = \cos(\alpha x)$, $I_f(\alpha)$ - косинус-преобразование Фурье.

Выражение (1.4) можно также переписать как

$$I_f = Lf,$$

где L - линейный интегральный оператор, определяемый правой частью (1.4). Одна из основных задач теории интегральных преобразований состоит в том, чтобы установить функциональные классы B такие, что для любого $I_f \in B$ существует единственное решение $f(x) \in \Im$. В ряде случаев оказывается, что L - непрерывно обратимый оператор из $\Im$ в B. Тогда

$$f = L^{-1} I_f.$$

Пусть L^{-1} также имеет вид интегрального, т.е.

$$f(x) = \int\limits_0^\infty H(\alpha, x) I_f(\alpha)\, d\alpha. \tag{1.5}$$

Определение 5.При выполнении условия

$$H(\alpha, x) = K(\alpha, x),$$

для обратного преобразования (1.5), функция $K(\alpha, x)$ называется *ядром Фурье.*

Рассмотрим частный случай $K(x, \alpha) = K(\alpha x) = K(\alpha, x)$.

Теорема. Для того, чтобы функция $K(x)$ являлась ядром Фурье необходимо, чтобы ее преобразование Меллина

$$\mathbf{K}(s) = \int\limits_0^\infty K(x) x^{s-1} dx$$

удовлетворяло равенству

$$\mathbf{K}(s)\mathbf{K}(1-s) = 1.$$

Доказательство. Умножим обе части соотношения (1.4) на α^{s-1} и проинтегрируем от 0 до ∞.

$$\mathbf{I}(s) \equiv \int\limits_0^\infty I_f(\alpha)\alpha^{s-1}d\alpha =$$

$$= \int\limits_0^\infty \alpha^{s-1} \int\limits_0^\infty K(\alpha x) f(x)\, dx\, d\alpha = \int\limits_0^\infty f(x) \int\limits_0^\infty K(\alpha x)\alpha^{s-1}\, d\alpha\, dx.$$

После замены переменных $u = \alpha x$, получим

$$\mathbf{I}(s) = \int_0^\infty f(x)\,dx \int_0^\infty K(u) u^{s-1} x^{-s}\,du = \int_0^\infty f(x) x^{-s}\,dx \mathbf{K}(s).$$

Следовательно,

$$\mathbf{F}(1-s)\mathbf{K}(s) = \mathbf{I}(s). \tag{1.6}$$

Проделав те же преобразования для формулы (1.5), получим, что

$$\mathbf{I}(1-s)\mathbf{K}(s) = \mathbf{F}(s),$$

что, после замены s на $(1-s)$ приводит к

$$\mathbf{I}(s)\mathbf{K}(1-s) = \mathbf{F}(1-s).$$

Подстановка получившегося выражения для $\mathbf{F}(1-s)$ в (1.6) завершает доказательство.

Взвешенное преобразование Фурье

За счет очень большой избыточности, кодируя функцию одного действительного переменного двумерной функцией (*взвешенное преобразование Фурье*)

$$Gf(\omega, s) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x-s)e^{-i\omega x}dx,$$

мы можем добиться лучшей локализации по получаемой информации о спектре - модуле преобразования Фурье. Такое преобразование также называется *оконным преобразованием Фурье*. При этом, *оконная функция* $g(x)$ должна быть нормированной

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dx = 1.$$

Она должна иметь либо компактный носитель, содержащий 0, например

$$g(x) = \begin{cases} 1/(2h), x \in [-h, h], \\ 0, x \notin [-h, h], \end{cases}$$

либо быть "сосредоточенной с вычислительной точки зрения"в конечной окрестности 0, например Гауссовское окно

$$g(x) := \mathbf{N}_{\sigma,0}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{(-\frac{x^2}{2\sigma^2})}.$$

При этом ширина окна (ширина области локализации по x) частотной информации $Gf(\omega, s)$ в точке s определяется, соответственно, величинами h и σ. Эти величины должны согласоваться с характерной частотой сигнала (функции f).